# Notas de aula complementares sobre Relatividade Especial para Física IV

Daniel Jonathan
*Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, Niterói, Brazil*
(Dated: March 27, 2015)

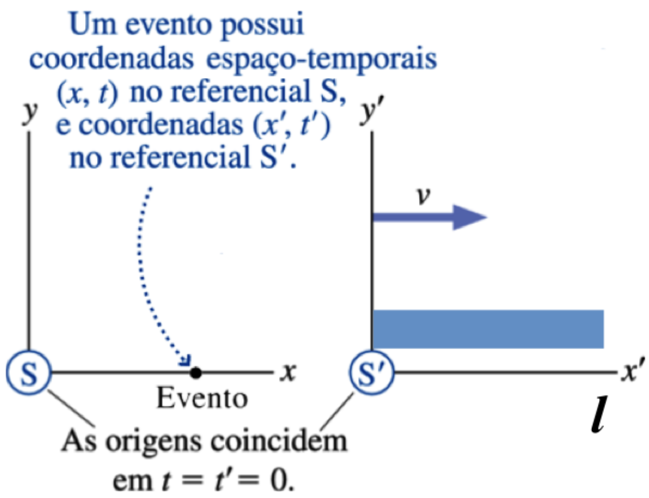
## I. INTRODUÇÃO

Nestas notas apresento alguns cálculos e observações sobre a teoria da Relatividade Especial que complementam a discussão no texto adotado pelo curso de Física IV do IF-UFF (Randall Knight 2a ed., vol. 4, cap 37).

## II. DERIVAÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

Nessa seção derivamos as Transformações de Lorentz (eq. 37.23). Relembrando, essas equações nos dizem como obter as coordenadas espaço-temporais de um evento em um certo referencial inercial, dadas as coordenadas do mesmo evento em um outro referencial inercial, em movimento uniforme com respeito ao primeiro.

A derivação que apresentamos aqui evita a suposição simplificadora que o livro-texto faz na eq. 37.20. Ela se baseia em extrapolar a situação particular da contração espacial, analisada na seção 37.7




**1o passo:** Considere uma régua de comprimento próprio $l$, se movendo com velocidade $v$ para a direita com respeito a um referencial $S$ (Fig). Chamamos de $S'$ o referencial que acompanha a régua, com origem na sua ponta esquerda. Escolhemos ainda a origem de $S$ de modo que, no instante $t = t' = 0$, as duas origens coincidam (a posição da ponta esquerda da régua vale $x = x' = 0$).

Considere agora o seguinte evento:

**Evento 1:** após um tempo $t$ medido no referencial $S$, a ponta *direita* da régua está em algum ponto $x$.

É fácil determinar quanto vale $x$, pois pela contração espacial sabemos que o comprimento da régua vale $l/\gamma$ no referencial $S$. Essa é a posição da ponta direita no instante $t = 0$. Após um tempo $t$ (medido no ref. $S$), essa ponta terá então se movido para a posição $x = l/\gamma + vt$.

Por outro lado, no referencial $S'$ a régua está imóvel. A posição da ponta direita sempre tem o mesmo valor $x' = l$. Substituindo acima, podemos concluir então que $x = x'/\gamma + vt$, ou seja:

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{1}$$

que é a primeira parte das transformações de Lorentz.

Observe agora que, dado um evento qualquer ocorrendo em algum ponto $(x \geq 0, t)$, sempre existe alguma régua de velocidade $v$ cuja ponta direita chega no ponto $x$ justamente no instante $t$. Assim, a relação (1) vale na verdade para qualquer evento nessas posições. No caso de eventos ocorrendo em pontos com $x < 0$, precisamos modificar ligeiramente o argumento, dessa vez tomando a origem de $S'$ na ponta *direita* da régua e utilizando as coordenadas da ponta esquerda como o nosso 'Evento 1'. É fácil ver que obtém-se novamente a relação (1). Em outras palavras, ela vale para *qualquer* evento.

Note que podemos imediatamente também aplicar esse argumento para o caso de réguas se movendo para a esquerda (i.e. para a 'direita' com velocidade negativa $-v$), de modo a obter a relação inversa

$$x = \gamma(x' + vt'). \tag{2}$$

**2o passo:** Para deduzir a 2a parte das transformações de Lorentz, a maneira mais simples é prosseguir como sugerido no livro-texto: se obtemos $x'$ a partir de $(x, t)$ usando a eq. (1), e depois calculamos $x$ usando a eq. (2), precisamos retornar para o valor de onde iniciamos. Em outras palavras, substituindo uma eq. na outra temos de ter

$$x = \gamma\Big(\gamma(x - vt) + vt'\Big)$$

resolvendo para $t'$:

$$t' = \gamma t + \frac{x}{v\gamma}\left(1 - \gamma^2\right) = \gamma t + x\left(\frac{-v^2\gamma^2}{c^2 v\gamma}\right)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \quad \square \tag{3}$$

Note que, novamente, podemos também considerar uma régua se movendo para a esquerda, resultando na transformação reversa

$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right). \tag{4}$$

Uma outra dedução, mais longa, da eq. (3), mas que talvez ilumina melhor o seu sentido, é a seguinte: voltando à régua da figura, suponha agora que haja um relógio embutido na ponta direita, o qual marca um intervalo de tempo $\tau$ entre cada dois 'tiques'. O relógio é iniciado em $t' = 0$. Vamos definir então o evento

**Evento 2:** Ocorre o primeiro 'tique' do relógio.

No referencial $S'$, as coordenadas do Evento 2 são $(x'_2, t'_2) = (l, \tau)$. Podemos então usar a relação (2) acima para obter a sua posição no ref. $S$:

$$x_2 = \gamma(l + v\tau). \tag{5}$$

Agora: como vimos acima, no referencial $S$ a ponta direita começa (em $t = 0$) na posição $x = l/\gamma$. Então para chegar até a posição $x_2$, andando com velocidade $v$, ela leva um tempo

$$t_2 = \frac{\gamma}{v}\left(l + v\tau - l/\gamma^2\right) = \gamma\left(\frac{vl}{c^2} + \tau\right) \tag{6}$$

(Obs: note que $t_2 \neq \gamma\tau$, i.e., não podemos aplicar diretamente a fórmula da dilatação temporal! Isso ocorre porque, no referencial $S$, a inicialização do relógio *não* ocorre em $t = 0$, mas em $t = \frac{\gamma vl}{c^2}$! Você pode deduzir esse fato tomando $\tau = 0$ acima).

Podemos ver então que

$$t_2 - vx_2/c^2 = \gamma\left[\frac{vl}{c^2} + \tau - \frac{vl}{c^2} - \frac{v^2\tau}{c^2}\right] = \tau\gamma\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \tau/\gamma \tag{7}$$

Em outras palavras

$$\tau = \gamma\left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}\right). \tag{8}$$

Dado porém qualquer evento ocorrendo em algum ponto $(x' \geq 0, t')$, sempre podemos imaginar uma régua e relógio com esses valores de $l = x'$ e $\tau = t'$. Podemos concluir então que, para qualquer evento desses, vale a eq. (3).

(Como acima, se $x' < 0$ podemos adaptar o argumento usando um relógio na ponta esquerda da régua, e com a origem de $S'$ na ponta direita, resultando novamente na eq. (3).).

## III. DERIVAÇÃO DA FORMA RELATIVÍSTICA DA ENERGIA CINÉTICA

Nessa seção derivamos a expressão relativística para a Energia cinética de uma partícula:

$$K = (\gamma_p - 1)\, mc^2, \tag{9}$$

onde $\gamma_p = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ e $u$ é a velocidade do corpo. Lembre-se que para obter a Energia *total* relativística $E$ precisamos somar a esse valor a energia de repouso $mc^2$, de modo que

$$E = \gamma_p mc^2. \tag{10}$$

**Demonstração da eq. (9):** A energia cinética relativística $K$ pode ser definida de forma análoga à feita em Física 1 para o caso Newtoniano: ela corresponde ao trabalho realizado sobre o corpo por forças externas (conservativas), a partir de uma condição inicial em que este está em repouso:

$$K = W_{i\to f} = \int_i^f \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}\cdot \mathbf{u} dt \tag{11}$$

onde $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{s}}{dt}$ é o vetor velocidade do corpo, e $\mathbf{F}$ representa a força resultante sobre ele. Por definição, essa força está conectada a uma variação no momento (2a Lei de Newton). No caso relativístico, essa relação fica

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{P}_{relat}}{dt} \tag{12}$$

onde $P_{relat}$ é o Momento Linear relativístico, que tem a forma dada na Eq. (37.35):

$$\mathbf{P}_{relat} = \gamma_p m\mathbf{u} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{13}$$

Substituindo as Eqs (12), (13) na eq. (11) temos

$$K = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt}\left(\gamma_p m\mathbf{u}\right)\cdot \mathbf{u} dt$$

Integrando por partes essa expressão:

$$K = \left(\gamma_p m\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\right)\Big|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \gamma_p m\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt}dt = \gamma_p mu^2\Big|_{t_i}^{t_f} - m\int_i^f \gamma_p \mathbf{u}\cdot d\mathbf{u}$$

Esta última integral pode ainda ser reescrita usando a identidade $\mathbf{u}\cdot d\mathbf{u} = \frac{1}{2}d(u^2) \equiv \frac{c^2}{2}dy$, onde definimos a nova variável de integração $y = \frac{u^2}{c^2}$. Expandindo $\gamma_p$, e assumindo a condição inicial $u_i = 0$ (repouso), temos então:

$$\begin{aligned}
K &= m\frac{u_f^2}{\sqrt{1-u_f^2/c^2}} - mc^2\int_0^{u_f^2/c^2}\frac{dy}{2\sqrt{1-y}} \\
&= m\frac{u_f^2}{\sqrt{1-u_f^2/c^2}} + mc^2\sqrt{1-y}\Big|_0^{u_f^2/c^2} \\
&= m\frac{u_f^2 + (c^2-u_f^2)}{\sqrt{1-u_f^2/c^2}} - mc^2 \\
&= (\gamma_p - 1)\, mc^2 \quad \square
\end{aligned}$$